Análise Numérica

Timóteo Sambo (2020), adaptado por Nelson Mulemba

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Maputo, September 2, 2024

Índice

Introdução

Nesta aula estudaremos os métodos de resolução de sistemas de equações lineares de n equações e n incógnitas.
Um sistema linear pode ter:

- nenhuma solução (sistema impossível);
- uma única solução (sistema possível e determinados);
- infinidade de soluções (sistema possível e indeterminados).

Estudaremos apenas os sistemas possíveis determinados. Afim de achar a solução, trabalharemos com dois métodos:

Métodos directos: fornecem solução exacta (a menos de erros de arredondamento);

Métodos Iterativos: sobre certas condições, produzem uma sequência que converge para a solução.

Sistemas de Equações Lineares

Sistema de equações lineares

Um sistema de equações é um conjunto de equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

que devem ser resolvidas simultaneamente.

Sistemas de Equações Lineares

Note que, o sistema pode ser escrito na forma $AX = B$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Método directo

Método de Eliminação de Gauss

Consiste em transformar o sistema em um outro mais simples que tenha a mesma solução que o original, recorrendo as chamadas **operações elementares**:

- Permutar linhas;
- Multiplicar uma linha por uma constante diferente de zero;
- Trocar uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha.

O objectivo é transformar a matriz A em uma matriz triangular superior. Resolver um sistema desse tipo é simples (substituição rectroactiva), como ilustra o seguinte exemplo.

Método directo

Resolva o sistema $\begin{cases} x - 3y + 3z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = 6 \end{cases}$

Resolução

- Da última equação, $z = 3$;
- Substituíndo na segunda equação, vemos que $y = \frac{5}{3}$ e, finalmente;
- Substituindo na primeira equação concluímos que $x = 0$.

Método directo

Considere a chamada matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Passos do Método de Eliminação de Gauss

- Na coluna k o elemento a_{kk} é diferente de zero. Caso isso não ocorra, algum dos elemento abaixo dele, digamos a_{ik} com $i > k$, será diferente de zero, permutamos as linhas k e i;
- Seja L_i a linha i da matriz aumentada. Se $i > k$, vamos trocar L_i por $L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k$. Portanto, todos os elementos abaixo da diagonal principal serão iguais a zero.

Método de Eliminação de Gauss

Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

Resolução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-4}{-5} L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ \quad y = \frac{37}{3} \\ \quad\quad z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

Resolução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-4}{-5}L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

Resolução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-4}{-5} L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ 3x+y-z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$

Resolução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-4}{-5} L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

Resolução

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{-4}{-5} L_2}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

Propagação de Erros

Observação

Cada etapa do método de eliminação de Gauss envolve uma divisão pelo pivot a_{kk}. Se a_{kk} estiver muito próximo de zero, essa divisão pode aumentar bastante, o que pode causar erros de arredondamento. Observe o exemplo seguinte.

Considere o sistema $\begin{cases} 0,0003x + 1,566y = 1,569 \\ 0,3454x - 2,436y = 1,018 \end{cases}$ cuja solução exacta é $x = 10,\ y = 1$.

Propagação de Erros

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0,3454 & -2,436 & 1,018 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0,3454}{0,0003} L_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{r} 0,0003x + 1,566y = 1,569 \\ -1804y = -1805 \end{array}\right.$$

Logo,

$$\bar{y} = 1,001$$

e

$$\bar{x} = \frac{1,569 - 1,566y}{0,0003} = 3,333.$$

Esta solução difere obviamente da solução exacta devido a má escolha do pivot.

Propagação de Erros

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0,3454 & -2,436 & 1,018 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0,3454}{0,0003} L_1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 0,0003x + 1,566y = 1,569 \\ -1804y = -1805 \end{cases}$$

Logo,

$$\bar{y} = 1,001$$

e

$$\bar{x} = \frac{1,569 - 1,566y}{0,0003} = 3,333.$$

Esta solução difere obviamente da solução exacta devido a má escolha do pivot.

Propagação de Erros

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0,3454 & -2,436 & 1,018 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0,3454}{0,0003} L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,0003 & 1,566 & 1,569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right) \left\{ \begin{array}{r} 0,0003x + 1,566y = 1,569 \\ -1804y = -1805 \end{array} \right.$$

Logo,

$$\bar{y} = 1,001$$

e

$$\bar{x} = \frac{1,569 - 1,566y}{0,0003} = 3,333.$$

Esta solução difere obviamente da solução exacta devido a má escolha do pivot.

Método de Eliminação de Gauss

Observação

Para contornar esse problema, temos que permutar linhas e escolher como pivot o elemento de maior módulo da coluna em questão. Isso fará com que $0 < \left|\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right| \leq 1$, o que limita os erros de arredondamento (**estratégia de pivotamento parcial**).

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,3454 & -2,436 & 1,018 \\ 0,0003 & 1,566 & 1,569 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0,0003}{0,34541} L_1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,34541 & -2,436 & 1,018 \\ 0 & 1,568 & 1568 \end{array}\right) \begin{cases} 0,3454x - 2,436y = 1,018 \\ 1,568y = 1,568 \end{cases}$$

Logo, $y = 1$ e $x = \frac{1,018+2,436y}{0,3454} = 10$.

Método de Eliminação de Gauss

Observação

Para contornar esse problema, temos que permutar linhas e escolher como pivot o elemento de maior módulo da coluna em questão. Isso fará com que $0 < \left|\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right| \leq 1$, o que limita os erros de arredondamento (**estratégia de pivotamento parcial**).

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,3454 & -2,436 & 1,018 \\ 0,0003 & 1,566 & 1,569 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0,0003}{0,34541} L_1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,34541 & -2,436 & 1,018 \\ 0 & 1,568 & 1568 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{r} 0,3454x - 2,436y = 1,018 \\ 1,568y = 1,568 \end{array}\right.$$

Logo, $y = 1$ e $x = \frac{1,018+2,436y}{0,3454} = 10.$

Método de Eliminação de Gauss

Observação

Para contornar esse problema, temos que permutar linhas e escolher como pivot o elemento de maior módulo da coluna em questão. Isso fará com que $0 < \left|\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right| \leq 1$, o que limita os erros de arredondamento (**estratégia de pivotamento parcial**).

Resolução do sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,3454 & -2,436 & 1,018 \\ 0,0003 & 1,566 & 1,569 \end{array}\right) \underset{\Leftrightarrow}{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{0{,}0003}{0{,}34541} L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,34541 & -2,436 & 1,018 \\ 0 & 1,568 & 1568 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{r} 0,3454x - 2,436y = 1,018 \\ 1,568y = 1,568 \end{array}\right.$$

Logo, $y = 1$ e $x = \frac{1{,}018+2{,}436y}{0{,}3454} = 10$.

Introdução

- Estudamos os métodos directos para determinar a solução exacta de um sistema linear (a menos de erros de arredondamento). Desta vez, estudaremos os métodos iterativos, que fornecem soluções aproximadas para os sistemas;
- A ideia central é converter o sistema $AX = B$ na forma $X = \varphi(X)$, sendo a função auxiliar do método do ponto fixo dada por $\varphi(X) = CX + D$. De seguida, escolhemos uma aproximação inicial $X^{(0)}$ e recursivamente achamos as restantes aproximações mediante

$$X^{(k)} = CX^{(k-1)} + D.$$

Introdução

- Estudamos os métodos directos para determinar a solução exacta de um sistema linear (a menos de erros de arredondamento). Desta vez, estudaremos os métodos iterativos, que fornecem soluções aproximadas para os sistemas;
- A ideia central é converter o sistema $AX = B$ na forma $X = \varphi(X)$, sendo a função auxiliar do método do ponto fixo dada por $\varphi(X) = CX + D$. De seguida, escolhemos uma aproximação inicial $X^{(0)}$ e recursivamente achamos as restantes aproximações mediante

$$X^{(k)} = CX^{(k-1)} + D.$$

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{11} \neq 0, \;\; a_{22} \neq 0, \ldots,$ podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{11} \neq 0, \; a_{22} \neq 0, \ldots,$ podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{11} \neq 0, \; a_{22} \neq 0, \ldots,$ podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{11} \neq 0, \ a_{22} \neq 0, \ldots,$ podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{11} \neq 0, \ a_{22} \neq 0, \ldots,$ podemos escrever

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

- O Método consiste em chutar uma aproximação inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ substituir esses valores no lado direito do último sistema, obter $x^{(1)}$, em seguida colocar esses novos valores nas equações e obter $x^{(2)}, \ldots$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ \quad\vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}\right) \end{cases}$$

Convergência do Método de Gauss-Jacobi

Definição

Uma matriz que satisfaz

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|,\ \ i = 1, 2, \dots, n \ \textbf{(critério das linhas)}$$

é chamada estritamente diagonal dominante.

Teorema

Se o sistema linear satisfaz o critério das linhas então o método de Gauss-Jacobi converge.

Método de Gauss-Jacobi

Ache as primeiras duas iterações do método de Gauss-Jacobi para o sistema $\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$

Verificação da convergência

- Linha 1: $|a_{11}| = 6 > 1 + 1 = |a_{12}| + |a_{13}|$;
- Linha 2: $|a_{22}| = 8 > 1 + 1 = |a_{21}| + |a_{23}|$;
- Linha 3: $|a_{33}| = 5 > 1 + 1 = |a_{31}| + |a_{32}|$.

A matriz é diagonal dominante, portanto, é garantida a convergência do método de Gauss-Jacobi para a solução exacta qualquer que seja o valor inicial utilizado.

Método de Gauss-Jacobi

Ache as primeiras duas iterações do método de Gauss-Jacobi para o sistema $\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$

Verificação da convergência

- Linha 1: $|a_{11}| = 6 > 1 + 1 = |a_{12}| + |a_{13}|$;
- Linha 2: $|a_{22}| = 8 > 1 + 1 = |a_{21}| + |a_{23}|$;
- Linha 3: $|a_{33}| = 5 > 1 + 1 = |a_{31}| + |a_{32}|$.

A matriz é diagonal dominante, portanto, é garantida a convergência do método de Gauss-Jacobi para a solução exacta qualquer que seja o valor inicial utilizado.

Método de Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$

Isolamento das incógnitas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{6}(7 + y - z) \\ \\ y = \frac{1}{8}(16 - x + z) \\ \\ z = \frac{1}{5}(18 - x - y) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Escolha da aproximação Inicial

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0 \\ y^{(0)} = 0 \\ z^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Iterações

$$\begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{6}(7 + y^{(0)} - z^{(0)}) = 1,1667 \\ \\ y^{(1)} = \frac{1}{8}(16 - x^{(0)} + z^{(0)}) = 2 \\ \\ z^{(1)} = \frac{1}{5}(18 - x^{(0)} - y^{(0)}) = 3,6 \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Iterações

$$\begin{cases} x^{(2)} = \frac{1}{6}(7 + y^{(1)} - z^{(1)}) = \frac{1}{6}(7 + 2 - 3,6) = 0,9 \\ y^{(2)} = \frac{1}{8}(16 - x^{(1)} + z^{(1)}) = \frac{1}{8}(16 - 1,1667 + 3,6) = 2,3042 \\ z^{(2)} = \frac{1}{5}(18 - x^{(1)} - y^{(1)}) = \frac{1}{5}(18 - 1,1667 - 3,6) = 2,9667 \end{cases}$$

Critério de Parada

Dado um vector inicial $x^{(0)}$ o processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k+1)}$. A distância entre os vectores é medida por

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \right\},$$

Dada uma precisão ϵ, o vector $x^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada da solução exacta, se:

Critério do erro absoluto: $d^{(k)} < \epsilon$;

Critério do erro relativo: $\delta^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_i^{(k)} \right| \right\}} < \epsilon$;

Critério do número máximo de iterações

Critério de Parada

Dado um vector inicial $x^{(0)}$ o processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo do vetor $x^{(k+1)}$. A distância entre os vectores é medida por

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \right\},$$

Dada uma precisão ϵ, o vector $x^{(k)}$ será escolhido como solução aproximada da solução exacta, se:

Critério do erro absoluto: $d^{(k)} < \epsilon$;

Critério do erro relativo: $\delta^{(k)} = \dfrac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_i^{(k)} \right| \right\}} < \epsilon$;

Critério do número máximo de iterações

Método de Gauss-Jacobi

Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$, com precisão de $0,01$ no erro relativo.

Iterações

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{6}(7 + y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{8}(16 - x^{(k-1)} + z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{5}(18 - x^{(k-1)} - y^{(k-1)}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$

, com precisão de $0,01$ no erro relativo.

Iterações

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{6}(7 + y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ \\ y^{(k)} = \frac{1}{8}(16 - x^{(k-1)} + z^{(k-1)}) \\ \\ z^{(k)} = \frac{1}{5}(18 - x^{(k-1)} - y^{(k-1)}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} 6x - y + z = 7 \\ x + 8y - z = 16 \\ x + y + 5z = 18 \end{cases}$$, com precisão de $0,01$ no erro relativo.

Iterações

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{6}(7 + y^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ \\ y^{(k)} = \frac{1}{8}(16 - x^{(k-1)} + z^{(k-1)}) \\ \\ z^{(k)} = \frac{1}{5}(18 - x^{(k-1)} - y^{(k-1)}) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	1,1667	2	3,6	3,6	1
2	0,9	2,3042	2,9667	0,6333	0,2135
3	1,0563	2,2583	2,9592	0,1563	0.0528
4	1,0499	2,2379	2,9371	0,0221	0,0075

O erro relativo tornou-se menor que $0,01$ após 4 iterações, logo $x = 1,0499$, $y = 2,2379$, $z = 2,9371$ é a solução aproximada.

Método de Gauss-Jacobi

Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 60 \\ 4x - y + 2z = 20 \\ x + 4y + 7z = 35 \end{cases}$$, com precisão de $0,05$ no erro relativo.

Verificação da convergência

A matriz A não é estritamente diagonalmente dominante, mas se permutarmos as primeiras duas linhas obteremos uma matriz de coeficientes estritamente diagonalmente dominante, i.e,

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 20 \\ x + 3y + z = 60 \\ x + 4y + 7z = 35 \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Use o método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 60 \\ 4x - y + 2z = 20 \\ x + 4y + 7z = 35 \end{cases}, \text{ com precisão de } 0,05 \text{ no erro relativo.}$$

Verificação da convergência

A matriz A não é estritamente diagonalmente dominante, mas se permutarmos as primeiras duas linhas obteremos uma matriz de coeficientes estritamente diagonalmente dominante, i.e,

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 20 \\ x + 3y + z = 60 \\ x + 4y + 7z = 35 \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Isolamento das incógnitas

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(20 + y - 2z) \\ \\ y = \frac{1}{3}(60 - x - z) \\ \\ z = \frac{1}{7}(35 - x - 4y) \end{cases}$$

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377

Método de Gauss-Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} x^{(k)} = \frac{1}{4}(20 + y^{(k-1)} - 2z^{(k-1)}) \\ y^{(k)} = \frac{1}{3}(60 - x^{(k-1)} - z^{(k-1)}) \\ z^{(k)} = \frac{1}{7}(35 - x^{(k-1)} - 4y^{(k-1)}) \end{cases}$$

k	x	y	z	$d^{(k)}$	$\delta^{(k)}$
0	0	0	0		
1	5	20	5	20	1
2	7,5	16,667	-7,143	12,143	0,7286
3	12,738	19,881	-5,595	5,2381	0,2635
4	12,768	17,619	-8,18	2,585	0,1467
5	13,495	18,471	-6,892	1,2883	0,0697
6	13,064	17,799	-7,483	0,6718	0,0377


GARANTE O TEU FUTURO
COM UMA FORMAÇÃO SÓLIDA
ISUTC
Prolong. da Av. Kim Il Sung (IFT/TDM) Edifício D1
Maputo, Moçambique
www.facebook.com/isutc
www.transcom.co.mz/isutc