

# ISUTC: Matemática Geral, Ficha-III

11 de Março - 15 de Março de 2024

## Conjuntos numéricos

1. Determine por extensão os seguintes conjuntos:

(a)  $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3 \vee 5 < x < 7\}$ .

(b)  $B = \{x^2 - 1 | x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 3\}$ .

(c)  $C = \{3 - 5x | x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x < 5 \wedge 3 < x \leq 8\}$ .

2. Mencione a propriedade dos números reais que está sendo usada em cada caso:

a)  $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$ .

b)  $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$ .

c)  $2x(3 + y) = (3 + y)2x$ .

d)  $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$ .

3. Mostre que se  $a, b, c > 0$  então  $(b + c)(a + c)(a + b) \geq 8abc$ .

4. Mostre que se  $a + b + c = 0$  então  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

5. Dê um exemplo de dois números irracionais cuja soma é um número racional.

6. Expanda as seguintes expressões

a)  $(x + y - r)(z + w - t)$ .

b)  $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4)$ .

c)  $xy(x + y)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ .

d)  $a^2z(z - a)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{a}\right)$ .

7. Simplifique as seguintes expressões tanto quanto possível:

a)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot 2$ .

b)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{4} \cdot 2$ .

c)  $\frac{1}{x - y}\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$ .

d)  $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x - y} - \frac{1}{x + y}\right)$ .

e)  $\frac{(x + a)^2 - x^2}{a}$ .

f)  $\frac{1}{\frac{x + a}{a} - \frac{1}{x}}$ .

8. Explique como pode mostrar que  $51 \times 49 = 2499$  mentalmente usando a identidade  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

9. Expresse o intervalo em termos de desigualdades, e esboce o intervalo.

a)  $(-3, 0)$ .

b)  $[2, 8)$ .

c)  $\left[-6, -\frac{1}{2}\right]$ .

d)  $[2, 8)$ .

e)  $(-8, 1]$ .

10. Coloque na forma de uma fração irredutível os seguintes números racionais.

a)  $0,444 \dots$ ,

b)  $0,323232 \dots$ ,

c)  $5,423423423 \dots$

11. Esboce as desigualdades em notação de intervalos, e depois esboce os intervalos correspondentes.

a)  $x \leq 1$ .

b)  $1 \leq x \leq 2$ .

c)  $-2 < x \leq 1$ .

d)  $x > -1$ .

e)  $-5 < x < 2$ .

12. Se  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$ . Ache

a)  $A \cup B \cup C$

b)  $(A - B) \cap (A \cup C)$

13. Escreva cada conjunto como um intervalo ou união de dois intervalos:

a)  $\left\{x : |x - 4| < \frac{1}{10}\right\}$ .

b)  $\left\{x : |x + 4| < \frac{\epsilon}{2}\right\}$ ; aqui  $\epsilon > 0$ .

c)  $\{x : |x - 5| \geq 3\}$ .

d)  $\{x : |x + 6| \geq 2\}$ .

14. Racionalize o denominador:

a)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

c)  $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$

d)  $\frac{1}{c^{3/7}}$

e)  $\frac{\sqrt{7 - \sqrt{13}}}{\sqrt{7 + \sqrt{13}}}$

f)  $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

g)  $\frac{1}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

15. Demonstre as seguintes fórmulas por indução.

(a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

(b)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

(c)  $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ , se  $r \neq 1$

(d)  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ .